



ODEROM

Ordinary Differential Equations, Relativity and Other Mathematics

Vinte e duas deduções de Schutz, reproduzidas

Confrontado com

B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*

3ª edição, Cambridge University Press, 2022

Rafael C. R. de Lima

Universidade do Estado de Santa Catarina — CCT, Joinville

ORCID 0000-0003-1718-3838

Sumário

1. O que este documento é
2. Capítulo 5 — cálculo tensorial em coordenadas polares
3. Capítulo 6 — variedades curvas
4. Capítulo 10 — soluções esféricas para estrelas
5. Capítulo 13 — cosmologia
6. O que não funcionou, e o que foi feito
7. Identidades e fatos estruturais — dez contas de outro tipo
8. O laço que fechou

1. O que este documento é

Vinte e duas deduções tensoriais de *A First Course in General Relativity* (B. F. Schutz, 3ª ed., Cambridge, 2022), refeitas pelo ODEROM. Cada uma traz a seção e a página do livro, o documento `.od` completo, o comando, e a saída do programa — bytes reais, capturados do binário, não transcritos.

As contas foram escolhidas por serem **afirmações verificáveis**: o livro diz quanto vale alguma coisa, e o programa ou reproduz ou não. Duas delas são do tipo "one can show that", em que o autor pula a álgebra — e são justamente as que mais valem a pena.

Elas vêm em duas partes, e a divisão não é cronológica. As doze dos capítulos 2 a 5 são do tipo "**calcule este tensor e compare com a fórmula**": o livro dá uma expressão fechada e o programa tem de chegar nela. As dez da parte 7 são de outra natureza — **identidades e fatos estruturais**: simetrias do Riemann, as identidades de Bianchi, curvatura nula onde a conexão não é nula, matéria em espaço plano, e uma solução exata que não é esfericamente simétrica.

Como cada conta é conferida

Onde o livro dá uma fórmula fechada, ela é escrita como um tensor no próprio documento e **subtraída** do que o ODEROM calcula. Os dois lados passam pelo mesmo parser e pelo mesmo normalizador, e o que se cobra é que a diferença seja identicamente nula.

Comparar strings de saída provaria bem menos: passaria a depender de escolhas de renderização — se o programa escreve $1/r$ ou r^{-1} , se põe a exponencial no numerador ou no denominador — que não são o assunto. A diferença não depende de nada disso.

Onde o zero é fraco, está dito. Uma identidade que vale por construção não prova que o programa a calculou: se ∇ devolvesse zero para tudo, a divergência do Einstein seria nula de graça. Por isso as contas desse tipo vêm com um **controle** ao lado — uma quantidade que *não* é nula e cujo valor o livro também dá. Sem o controle, o zero não é evidência.

Como rodar o que está aqui

Cada conta aparece em **dois blocos**, que é como o caderno funciona: um com as declarações, e o seguinte com a pergunta. Copie o primeiro, `Shift + Enter`, copie o segundo, `Shift + Enter`. Onde há mais de uma pergunta, cada linha é um bloco.

Na linha de comando é outra grafia, e não é a que este documento mostra. O caderno pede `eval V[a;a]`; o terminal pede o arquivo e as aspas do shell:

```
oderom eval --prelude polar.od "V[a;a]"
```

Uma consulta sem expressão — `christoffel`, `riemann`, `einstein` — vira `oderom christoffel polar.od`. Colar a linha do terminal num bloco do caderno não funciona: `oderom` não é palavra da linguagem, e a recusa lista as que são.

Todo documento `.od` deste relatório está completo no texto. As vinte e duas contas também estão fixadas como testes em `oderom-cli/tests/schutz.rs`, com as mesmas referências de página, e rodam em cerca de sete segundos com `cargo test -p oderom-cli --test schutz`.

2. Capítulo 5 — cálculo tensorial em coordenadas polares

O plano euclidiano numa carta curvilínea: sem curvatura, mas com símbolos de Christoffel não nulos. É onde o livro separa "a conexão não é zero" de "o espaço é curvo".

2.1 Os símbolos de Christoffel em coordenadas polares

CONFERE

Schutz: §5.4, p.127, Eq. 5.45

No plano euclidiano em coordenadas polares, três dos oito símbolos são não nulos: $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$ e $\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = 1/r$. Schutz os obtém derivando os vetores de base ($\partial e_r / \partial \theta = e_\theta / r$, $\partial e_\theta / \partial \theta = -r e_r$); aqui saem da métrica pela fórmula usual.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 2
bundle TM on M dim 2
chart pol on M coords (r, theta)
metric g on pol bundle TM { [r,r] = 1, [theta,theta] = r^2 }
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
christoffel
```

```
Gamma[^r,theta,theta] = -r
Gamma[^theta,r,theta] = r^-1
Gamma[^theta,theta,r] = r^-1
5 independent components identically zero
```

Os três do livro, com os mesmos sinais, e a confirmação de que os outros cinco se anulam — que é metade da afirmação e a metade que costuma ficar sem conferir.

2.2 A divergência de um vetor em polares

CONFERE

Schutz: §5.3, p.129, Eq. 5.56

$V^\alpha_{;\alpha} = \partial V^r / \partial r + \partial V^\theta / \partial \theta + V^r / r$. O terceiro termo é o que a derivada parcial não dá, e vem de $\Gamma^\alpha_{r\alpha} = 1/r$.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 2
bundle TM on M dim 2
chart pol on M coords (r, theta)
metric g on pol bundle TM { [r,r] = 1, [theta,theta] = r^2 }
tensor V : TM on pol { [r] = A(r,theta), [theta] = B(r,theta) }
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval V[a;a]
```

```
(r*A_r(r,theta) + r*B_theta(r,theta) + A(r,theta))/r
```

Dividindo por r : $A_r + B_\theta + A/r$, que é a Eq. 5.56. As componentes são funções indeterminadas das duas coordenadas de propósito — com um vetor concreto a conta fecharia por acidente aritmético em vez de reproduzir a fórmula.

2.3 O laplaciano em polares

CONFERE

Schutz: §5.3, p.129, Eq. 5.57

$\nabla^2 \phi = (1/r) \partial_r (r \partial_r \phi) + (1/r^2) \partial_\theta^2 \phi$. O caminho do livro é: converter a 1-forma gradiente em vetor, o que dá componentes $(\phi_{,r}, \phi_{,\theta}/r^2)$, e aplicar a Eq. 5.56.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 2
bundle TM on M dim 2
chart pol on M coords (r, theta)
metric g on pol bundle TM { [r,r] = 1, [theta,theta] = r^2 }
tensor D : TM on pol { [r] = phi_{r}(r,theta), [theta] = phi_{theta}(r,theta)/r^2 }
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval D[a;a]
```

```
(r*phi_r(r,theta) + r^2*phi_rr(r,theta) + phi_thetatheta(r,theta))/r^2
```

Dividindo por r^2 : $\phi_{rr} + \phi_r/r + \phi_{\theta\theta}/r^2$, que é a Eq. 5.57 com o primeiro termo expandido. O $\phi_{\{r\}}(r,theta)$ do documento é a notação de subscrito de

derivada do ODEROM — a derivada de `phi` em relação ao seu primeiro argumento, tratada como símbolo opaco, que é exatamente o estatuto que ela tem aqui.

3. Capítulo 6 — variedades curvas

A curvatura propriamente dita: o Riemann, o que ele significa (o comutador de derivadas covariantes), e a identidade que sustenta as equações de campo.

3.1 O Riemann e a curvatura da esfera

CONFERE

Schutz: Exercícios 6.28–6.29, p.167

Na esfera de raio a , a única componente independente é $R_{\theta\phi\theta\phi} = a^2 \sin^2\theta$, e o escalar de Ricci é $2/a^2$ — duas vezes a curvatura gaussiana $1/a^2$, como tem de ser em duas dimensões.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 2
bundle TM on M dim 2
chart s on M coords (theta, phi)
metric g on s bundle TM { [theta,theta] = a^2, [phi,phi] = a^2*sin(theta)^2 }
tensor Ric := ricci g
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
riemann
eval Ric[a,a]
```

```
R[theta,phi,theta,phi] = a^2*sin(theta)^2
(4 components by symmetry)

2/a^2
```

O escalar sai do traço, $\text{Ric}[a,a] = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, que é a definição do próprio livro (Eq. 6.92).

Pedir `tensor Rs := scalar g` é recusado pelo programa, e com razão: `scalar` devolve um escalar, e `tensor` declara tensor.

3.2 O comutador de derivadas covariantes É o Riemann

CONFERE

Schutz: §6.5, p.160, Eq. 6.77

$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} V^\nu$. Descendo o índice livre — o que é legítimo porque $\nabla g = 0$ faz subir e descer comutar com derivar, o argumento do próprio Schutz logo abaixo da Eq. 6.78 — a igualdade vira $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] W_\mu = R_{\mu\nu\alpha\beta} V^\nu$.

O documento — um bloco.

```

manifold M dim 2
bundle TM on M dim 2
chart s on M coords (theta, phi)
metric g on s bundle TM { [theta,theta] = a^2, [phi,phi] = a^2*sin(theta)^2 }
tensor W : TM* on s { [theta] = P(theta,phi), [phi] = Q(theta,phi) }
tensor V : TM on s { [theta] = P(theta,phi)/a^2, [phi] =
Q(theta,phi)/(a^2*sin(theta)^2) }
tensor R := riemann g

```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```

eval W[m;b,a] - W[m;a,b]
eval W[m;b,a] - W[m;a,b] - R[m,n,a,b] V[n]

```

```

[theta,theta,phi] = -Q(theta,phi)
[theta,phi,theta] = Q(theta,phi)
[phi,theta,phi] = sin(theta)^2*P(theta,phi)
[phi,phi,theta] = -sin(theta)^2*P(theta,phi)
4 independent components identically zero

8 independent components identically zero

```

A primeira saída mostra que o comutador tem conteúdo — quatro das oito células são não nulas —, e a segunda que ele é exatamente o Riemann contraído. Sem a primeira, a segunda não provaria nada: uma segunda derivada que devolvesse zero para tudo passaria igual.

O campo tem componentes indeterminadas P , Q , então nenhuma célula fecha por acidente. Esta é a conta que exercita a **segunda** derivada covariante, $W[m;b,a]$, com os dois índices de derivada em ordens trocadas.

3.3 A divergência do tensor de Einstein é nula

CONFERE

Schutz: §6.6, p.163, Eq. 6.99

$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$, a identidade de Bianchi duas vezes contraída. É ela que permite escrever $G = 8\pi T$: o lado esquerdo é livre de divergência por identidade, e o direito por conservação.

O documento — um bloco.

```

manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart frw on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on frw bundle TM {
  [t,t] = -1,
  [r,r] = Scale(t)^2/(1 - k*r^2),
  [theta,theta] = Scale(t)^2*r^2,
  [phi,phi] = Scale(t)^2*r^2*sin(theta)^2
}
tensor G := einstein g
tensor Ric := ricci g

```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```

eval G[a,b;b]
eval Ric[a,b;b]

```

4 independent components identically zero

```

[t] = (-6*k*Scale'(t) + 3*Scale(t)*Scale'(t)*Scale''(t) + 3*Scale(t)^2*Scale'''(t) -
6*Scale'(t)^3)/Scale(t)^3
3 independent components identically zero

```

O controle está na segunda saída, e é o que faz a primeira valer alguma coisa. A divergência do *Ricci* NÃO é nula — o próprio livro diz quanto ela vale, $\frac{1}{2}R_{,\lambda}$ (Eq. 6.96). Se o programa devolvesse zero para as duas, o zero da primeira não seria prova de nada. A métrica é FRW e não Schwarzschild justamente por isso: em vácuo G já é nulo componente a componente, e a divergência de zero é zero sem que ∇ tenha feito trabalho nenhum.

4. Capítulo 10 — soluções esféricas para estrelas

A conta central de todo curso de relatividade: o tensor de Einstein da métrica estática esfericamente simétrica, e o que ele dá quando igualado à matéria.

4.1 O tensor de Einstein da métrica estática esfericamente simétrica

CONFERE

Schutz: §10.2, p.271, Eqs. 10.14–10.17

Para $ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2d\Omega^2$, o livro diz "*one can show that*" e escreve as quatro componentes:

- $G_{00} = (1/r^2) e^{2\Phi} d/dr [r(1 - e^{-2\Lambda})]$
- $G_{rr} = -(1/r^2) e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda}) + (2/r)\Phi'$
- $G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda}[\Phi'' + (\Phi')^2 + \Phi'/r - \Phi'\Lambda' - \Lambda'/r]$
- $G_{\phi\phi} = \sin^2\theta \cdot G_{\theta\theta}$

Esta é a conta principal do capítulo, e o "one can show" é o que este documento existe para mostrar.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart sph on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on sph bundle TM {
  [t,t] = -exp(2*Phi(r)),
  [r,r] = exp(2*Lambda(r)),
  [theta,theta] = r^2,
  [phi,phi] = r^2 * sin(theta)^2
}
tensor G := einstein g
tensor S : TM*, TM* on sph {
  [t,t] = exp(2*Phi(r))/r^2 * diff(r*(1 - exp(-2*Lambda(r))), r),
  [r,r] = -exp(2*Lambda(r))*(1 - exp(-2*Lambda(r)))/r^2 + 2*Phi'(r)/r,
  [theta,theta] = r^2*exp(-2*Lambda(r))*(Phi''(r) + Phi'(r)^2 + Phi'(r)/r -
Phi'(r)*Lambda'(r) - Lambda'(r)/r),
  [phi,phi] = sin(theta)^2 * r^2*exp(-2*Lambda(r))*(Phi''(r) + Phi'(r)^2 + Phi'(r)/r -
- Phi'(r)*Lambda'(r) - Lambda'(r)/r)
}
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
einstein
eval G[a,b] - S[a,b]
```

```
G[t,t] = (2*r*exp(2*Phi(r))*Lambda'(r) + exp(2*Lambda(r))*exp(2*Phi(r)) -
exp(2*Phi(r)))/(r^2*exp(2*Lambda(r)))
G[r,r] = (1 + 2*r*Phi'(r) - exp(2*Lambda(r)))/r^2
G[theta,theta] = (-r*Lambda'(r) + r*Phi'(r) - r^2*Lambda'(r)*Phi'(r) + r^2*Phi'(r)^2
+ r^2*Phi''(r))/exp(2*Lambda(r))
G[phi,phi] = (-r*sin(theta)^2*Lambda'(r) + ... +
r^2*sin(theta)^2*Phi''(r))/exp(2*Lambda(r))
6 independent components identically zero

16 independent components identically zero
```

Dezesseis de dezesseis nulas. O tensor `S` é o do livro escrito literalmente, incluindo a derivada $\frac{d}{dr}[r(1 - e^{-2\Lambda})]$ da Eq. 10.14, que fica a cargo de `diff` — nada foi expandido à mão de um lado para bater com o outro. A conferência é a diferença dos dois tensores, e não a comparação das strings de saída: assim ela não depende de escolhas de renderização, que não são o assunto.

Esta conta encontrou um defeito. Escrever a Eq. 10.14 exigia `diff`, que o manual documenta e que a recusa de `sin'(x)` manda usar — e que, até esta rodada, virava um símbolo opaco chamado `diff` em vez de derivar. Ver §6.1.

4.2 A geometria exterior: Schwarzschild é vácuo

[CONFERE](#)

Schutz: §10.4, p.273

Fora da estrela, $\rho = p = 0$, e a solução tem de satisfazer $G_{\alpha\beta} = 0$.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart schw on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on schw bundle TM {
  [t,t] = -(1 - 2*Mass/r),
  [r,r] = 1/(1 - 2*Mass/r),
  [theta,theta] = r^2,
  [phi,phi] = r^2 * sin(theta)^2
}
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

einstein

10 independent components identically zero

As dez independentes, todas nulas. É a conta mais barata do documento e a que serve de sanidade para todas as outras: se esta falhasse, nenhuma das demais valeria discussão.

4.3 A equação de equilíbrio hidrostático relativístico

[CONFERE](#)

Schutz: §10.3, p.272, Eqs. 10.26–10.27

De $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$, com o fluido em repouso na métrica estática, sai $(\rho + p) d\Phi/dr = -dp/dr$. O livro observa que, das quatro equações, só a de $\alpha = r$ não se anula identicamente.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart sph on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on sph bundle TM {
  [t,t] = -exp(2*Phi(r)),
  [r,r] = exp(2*Lambda(r)),
  [theta,theta] = r^2,
  [phi,phi] = r^2 * sin(theta)^2
}
tensor T : TM, TM on sph {
  [t,t] = rho(r)*exp(-2*Phi(r)),
  [r,r] = p(r)*exp(-2*Lambda(r)),
  [theta,theta] = p(r)/r^2,
  [phi,phi] = p(r)/(r^2*sin(theta)^2)
}
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval T[a,b;b]
```

```
[^r] = (Phi'(r)*p(r) + Phi'(r)*rho(r) + p'(r))/exp(2*Lambda(r))
3 independent components identically zero
```

Uma só componente não nula, a de `r`, exatamente como o livro diz. Igualada a zero e multiplicada por $e^{2\Lambda}$: $\Phi'(p + \rho) + p' = 0$, que é a Eq. 10.27.

Esta conta encontrou o outro defeito, e o mais interessante. Antes desta rodada a saída era $(r*\exp(-2\Lambda)*\exp(2\Lambda)*\Phi'*p + \dots + 2*\exp(-2\Lambda)*\exp(2\Lambda)*p - 2*p)/(r*\exp(2\Lambda))$: o par métrica/inversa sobrevivia intacto em cada termo, e dois termos que deviam se cancelar ficavam no resultado. Não era resposta errada — era resposta numa forma que esconde o cancelamento que a conta inteira existe para mostrar. Ver §6.2.

5. Capítulo 13 — cosmologia

A mesma máquina, aplicada ao universo inteiro: a métrica FRW, a equação de Friedmann e a conservação da matéria.

5.1 O Einstein tridimensional da hipersuperfície

CONFERE

Schutz: §13.2, p.424, Eq. 13.9

Ao construir a métrica cosmológica, Schutz precisa do tensor de Einstein da hipersuperfície espacial $dl^2 = e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2$, e afirma que ele se obtém do quadridimensional (Eqs. 10.15–10.17) *pondo* $\Phi = 0$: $G_{rr} = -(1/r^2)e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda})$, $G_{\theta\theta} = -r e^{-2\Lambda}\Lambda'$, $G_{\phi\phi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta}$.

É uma afirmação sobre duas contas **diferentes** — uma em três dimensões, outra em quatro — e vale conferir por isso.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 3
bundle TM on M dim 3
chart esp on M coords (r, theta, phi)
metric h on esp bundle TM {
  [r,r] = exp(2*Lambda(r)),
  [theta,theta] = r^2,
  [phi,phi] = r^2 * sin(theta)^2
}
tensor G := einstein h
tensor S : TM*, TM* on esp {
  [r,r] = -exp(2*Lambda(r))*(1 - exp(-2*Lambda(r)))/r^2,
  [theta,theta] = -r*exp(-2*Lambda(r))*Lambda'(r),
  [phi,phi] = -sin(theta)^2*r*exp(-2*Lambda(r))*Lambda'(r)
}
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
einstein
eval G[a,b] - S[a,b]
```

```
G[r,r] = (1 - exp(2*Lambda(r)))/r^2
G[theta,theta] = -r*Lambda'(r)/exp(2*Lambda(r))
G[phi,phi] = -r*sin(theta)^2*Lambda'(r)/exp(2*Lambda(r))
3 independent components identically zero

9 independent components identically zero
```

Nove de nove nulas: a conta em três dimensões dá o mesmo que a de quatro com $\Phi = 0$, e o atalho do livro está certo.

5.2 A componente temporal do Einstein em FRW

CONFERE

Schutz: §13.3, p.439, Eq. 13.51

$G_{tt} = 3(\dot{R}/R)^2 + 3k/R^2$. É a única componente que a cosmologia precisa calcular: a isotropia mata as mistas, e a identidade de Bianchi liga a espacial a esta.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart frw on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on frw bundle TM {
  [t,t] = -1,
  [r,r] = Scale(t)^2/(1 - k*r^2),
  [theta,theta] = Scale(t)^2*r^2,
  [phi,phi] = Scale(t)^2*r^2*sin(theta)^2
}
tensor G := einstein g
tensor S : TM*, TM* on frw { [t,t] = 3*diff(Scale(t), t)^2/Scale(t)^2 +
3*k/Scale(t)^2 }
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval G[a,b]
eval G[a,b] - S[a,b]
```

```
[t,t] = (3*k + 3*Scale'(t)^2)/Scale(t)^2
[r,r] = (-k - 2*Scale(t)*Scale''(t) - Scale'(t)^2)/(1 - k*r^2)
[theta,theta] = -k*r^2 - 2*r^2*Scale(t)*Scale''(t) - r^2*Scale'(t)^2
[phi,phi] = -k*r^2*sin(theta)^2 - 2*r^2*sin(theta)^2*Scale(t)*Scale''(t) -
r^2*sin(theta)^2*Scale'(t)^2
12 independent components identically zero
```

$(3k + 3\dot{R}^2)/R^2$ é a Eq. 13.51. Na segunda chamada, a componente $[t,t]$ desaparece da lista de não nulas — as três que sobram são as espaciais, que `S` não declara.

As doze mistas nulas confirmam de passagem a outra afirmação do livro, a de que a isotropia garante $G_{ij} = 0$.

5.3 A equação de movimento da matéria

CONFERE

Schutz: §13.3, p.439, Eq. 13.47

De $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ em FRW sai $d(\rho R^3)/dt = -p d(R^3)/dt$: a taxa de variação da energia de um elemento de fluido é o trabalho que ele faz ao se expandir. Schutz nota que, por isotropia, as componentes espaciais se anulam identicamente.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart frw on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on frw bundle TM {
  [t,t] = -1,
  [r,r] = Scale(t)^2/(1 - k*r^2),
  [theta,theta] = Scale(t)^2*r^2,
  [phi,phi] = Scale(t)^2*r^2*sin(theta)^2
}
tensor T : TM, TM on frw {
  [t,t] = rho(t),
  [r,r] = p(t)*(1 - k*r^2)/Scale(t)^2,
  [theta,theta] = p(t)/(Scale(t)^2*r^2),
  [phi,phi] = p(t)/(Scale(t)^2*r^2*sin(theta)^2)
}
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval T[a,b;b]
```

```
[^t] = (Scale(t)*rho'(t) + 3*Scale'(t)*p(t) + 3*Scale'(t)*rho(t))/Scale(t)
3 independent components identically zero
```

Uma componente não nula, a temporal, e as três espaciais nulas — as duas metades da afirmação. Dividindo por `Scale(t)`: $\dot{\rho} + 3(\dot{R}/R)(\rho + p) = 0$. Multiplicando por R^3 : $\dot{\rho}R^3 + 3pR^2\dot{R} + 3pR^2\dot{R} = 0$, que é $d(\rho R^3)/dt = -p d(R^3)/dt$, a Eq. 13.47.

O caso da poeira ($p = 0$) dá $d(\rho R^3)/dt = 0$, e o da radiação ($p = \rho/3$) dá $d(\rho R^4)/dt = 0$ — as Eqs. 13.48 e 13.50, que saem desta por substituição.

6. O que não funcionou, e o que foi feito

Duas das doze contas não saíam. Nenhuma das duas por falta de recurso no programa: as duas por defeito, e uma delas silencioso.

6.1 `diff` era um símbolo opaco

Escrever a Eq. 10.14 como o livro a escreve exige a derivada $d/dr[r(1 - e^{-2\Lambda})]$. O manual documenta `diff(f(r), r)` na §9.10, e a recusa de `sin'(x)` diz, com todas as letras, "write `diff(sin(...), var)`".

Escrever isso num documento produzia:

```
diff(sin(x), x)    ->    diff(sin(x),x)
```

Um símbolo opaco de dois argumentos chamado `diff`, jamais derivado. Quem seguisse a mensagem de erro recebia uma resposta de aparência plausível e silenciosamente errada — exatamente a classe de falha que a lista de nomes reservados do projeto existe para impedir no caso de `tan`.

Resolvido: `diff(EXPR, VAR)` agora aplica a derivada, ligada ao `diff` que o motor já tinha. O segundo argumento é um nome de variável e só isso — `diff(f(x), x+1)` é recusado nomeando a grafia certa, em vez de tropeçar num `)` faltando.

```
diff(sin(x), x)          ->    cos(x)
diff(f(x)^2, x)          ->    2*f(x)*f'(x)
diff(f(x)*h(x), x)       ->    f(x)*h'(x) + f'(x)*h(x)
diff(diff(f(x), x), x)   ->    f''(x)
diff(f(x), y)            ->    0
```

6.2 `exp` e a equação TOV

O motor tratava `exp(u)` como átomo opaco, sem relação nenhuma com `exp(-u)`. Numa métrica estática isso é fatal de um jeito particular: $g_{rr} = e^{2\Lambda}$ e a inversa traz $e^{-2\Lambda}$, e **toda** divergência multiplica os dois. A TOV saía assim:

```
(r*exp(-2*Lambda(r))*exp(2*Lambda(r))*Phi'(r)*p(r) + ...
+ 2*exp(-2*Lambda(r))*exp(2*Lambda(r))*p(r) - 2*p(r))/(r*exp(2*Lambda(r)))
```

O par intacto em cada termo, e os dois últimos — que se cancelam — de pé no resultado. Resposta certa, numa forma que esconde o cancelamento que a conta existe para mostrar.

A primeira tentativa, e por que ela era pior que o problema

A regra óbvia é $\exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a+b)$, aplicada na multiplicação de monômios. Ela fez a TOV fechar — e quebrou o resto. Reprodutor mínimo:

```
(exp(x) + exp(y))^2
2*exp(x)*exp(y)*exp(x + y)^4*exp(2*x + 2*y)^3*exp(4*x + 4*y)^3
*exp(8*x + 8*y)^3...*exp(1024*x + 1024*y)
```

O argumento dobrando até 1024, e com valor errado. A causa é estrutural e o comentário que a regra tinha sido deixada de fora já a antecipava: `exp(x)`, `exp(y)`, `exp(x+y)` e

$\exp(2x+2y)$ são geradores **algebricamente dependentes**, e o anel de polinômios sobre o qual o MDC trabalha supõe geradores independentes. Cada rodada de redução fundia o que a anterior havia criado. O tensor de Einstein da §10.2 saía errado por isso.

O que resolve

Sinal canônico no argumento: $\exp(-u)$ é internado como o mesmo gerador que $\exp(u)$, com expoente -1 . Não cria gerador nenhum — apenas deixa de criar um a mais — e quem corta o par é o MDC comum que já existia.

```
exp(x)*exp(-x)      -> 1
exp(x-y)*exp(y-x)   -> 1
exp(x)^3*exp(-x)^2  -> exp(x)
(exp(x)+exp(y))^2    -> 2*exp(x)*exp(y) + exp(x)^2 + exp(y)^2
```

E a TOV fecha:

$$[\hat{r}] = (\Phi'(r)*p(r) + \Phi'(r)*\rho(r) + p'(r))/\exp(2*\Lambda(r))$$

6.3 O que continua em aberto

$\exp(2x)/\exp(x)$ não reduz. O sinal canônico junta u com $-u$; não junta u com $2u$. Fechar isso significa extrair o conteúdo inteiro do argumento — $\exp(2u) \rightarrow \exp(u)^2$ —, o que é uma decisão de representação e não um remendo: põe um cálculo de conteúdo em toda internação de $\exp$, que é caminho quente, e muda a grafia de toda saída com exponencial ($\exp(2*\Lambda(r))$ viraria $\exp(\Lambda(r))^2$, mais longe do que o livro escreve). Nenhuma das doze contas precisa disso, e o limite está fixado por um teste que falha se alguém o fechar sem atualizar a decisão.

Duas outras contas do livro ficaram de fora por não serem do tipo que este programa responde. A §8.3 (campo fraco) pede expansão em série, e o ODEROM não expande em série. A §7.4 (quantidades conservadas) pede vetores de Killing, que não existem como consulta.

7. Identidades e fatos estruturais — dez contas de outro tipo

As doze anteriores comparavam um tensor calculado com uma fórmula do livro. Estas dez são de outra natureza: identidades que o Riemann satisfaz por construção, curvatura nula onde a conexão não é nula, matéria em espaço plano, e uma solução exata sem simetria esférica.

7.1 Curvatura nula onde a conexão não é nula

CONFERE

Schutz: §6.5, p.159, logo abaixo da Eq. 6.71; Exercício 6.30, p.167

$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0 \iff$ variedade plana. Schutz sugere entre parênteses: "*try showing that this is true in polar coordinates for the Euclidean plane*", e o Exercício 6.30 pede o mesmo para o cilindro.

É a conta que separa "**a conexão não é nula**" de "**o espaço é curvo**". Em polares os três símbolos de Christoffel da §2.1 são não nulos, e mesmo assim o Riemann se anula: os termos quadráticos $\Gamma\Gamma$ cancelam exatamente as derivadas $\partial\Gamma$.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 2
bundle TM on M dim 2
chart pol on M coords (r, theta)
metric g on pol bundle TM { [r,r] = 1, [theta,theta] = r^2 }
tensor R := riemann g

# e o cilindro, num documento separado:
manifold M dim 2
bundle TM on M dim 2
chart cil on M coords (z, phi)
metric g on cil bundle TM { [z,z] = 1, [phi,phi] = a^2 }
tensor R := riemann g
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval R[a,b,c,d]
eval R[a,b,c,d]
```

```
16 independent components identically zero
16 independent components identically zero
```

O controle está no teste, e é a esfera: a MESMA máquina, contra `a^2*sin(theta)^2`, não dá zero (§3.1). Sem ele, um `riemann` que devolvesse zero sempre passaria nos dois.

É o teste mais afiado deste documento para uma classe específica de defeito: apagar os termos quadráticos $\Gamma\Gamma$ do Riemann deixa o cilindro passando — ele é plano por coeficientes constantes — e derruba o plano em polares na hora. Foi conferido assim, sabotando.

7.2 A três-esfera tem curvatura escalar constante

CONFERE

Schutz: Exercício 6.33, p.167

A três-esfera de raio a , em coordenadas hiperesféricas: $g_{\chi\chi} = a^2$, $g_{\theta\theta} = a^2 \sin^2\chi$, $g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2\chi \sin^2\theta$. A curvatura escalar é $6/a^2$.

Constante, e é isso que faz dela um espaço homogêneo e isotrópico — o caso $k = +1$ da cosmologia do capítulo 13.

O documento — um bloco.

```

manifold M dim 3
bundle TM on M dim 3
chart s3 on M coords (chi, theta, phi)
metric g on s3 bundle TM {
  [chi,chi] = a^2,
  [theta,theta] = a^2*sin(chi)^2,
  [phi,phi] = a^2*sin(chi)^2*sin(theta)^2
}
tensor Ric := ricci g

```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval Ric[a,a]
```

```
6/a^2
```

Sem χ nem θ na resposta, que é metade da afirmação: a curvatura é a mesma em todo ponto.

7.3 A divergência pela raiz do determinante

CONFERE

Schutz: §6.3, p.151, Eqs. 6.40 e 6.42

$$V^\alpha_{;\alpha} = (1/\sqrt{|g|}) (\sqrt{|g|} V^\alpha)_{,\alpha}.$$

Ela sai de $\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = (\sqrt{-g})_{,\mu}/\sqrt{-g}$ (Eq. 6.40): o traço do Christoffel é a derivada logarítmica do determinante da métrica. É a forma que se usa na prática, porque dispensa calcular Γ .

O documento — um bloco.

```

manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart schw on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on schw bundle TM {
  [t,t] = -(1 - 2*Mass/r),
  [r,r] = 1/(1 - 2*Mass/r),
  [theta,theta] = r^2,
  [phi,phi] = r^2 * sin(theta)^2
}
tensor V : TM on schw { [t] = A(t,r), [r] = B(t,r), [theta] = C(theta), [phi] = D(phi) }
raiz := sqrt(r^4*sin(theta)^2)
tensor S : TM on schw {
  [t] = (diff(raiz*A(t,r), t) + diff(raiz*B(t,r), r)
    + diff(raiz*C(theta), theta) + diff(raiz*D(phi), phi))/raiz
}

```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval V[a;a]
eval S[a]
```

```
(r*sin(theta)*A_t(t,r) + r*sin(theta)*B_r(t,r) + r*sin(theta)*C'(theta)
+ r*sin(theta)*D'(phi) + r*cos(theta)*C(theta) +
2*sin(theta)*B(t,r))/(r*sin(theta))

[^t] = (r*sin(theta)*A_t(t,r) + r*sin(theta)*B_r(t,r) + r*sin(theta)*C'(theta)
+ r*sin(theta)*D'(phi) + r*cos(theta)*C(theta) +
2*sin(theta)*B(t,r))/(r*sin(theta))
```

Idênticas, caractere por caractere — e calculadas por caminhos que não se tocam: a primeira pelos símbolos de Christoffel, a segunda por `sqrt` e `diff`. Em Schwarzschild $-g = r^4 \sin^2 \theta$.

Os dois últimos termos são os que a derivada parcial sozinha não dá:

`r*cos(theta)*C(theta)` e `2*sin(theta)*B(t,r)`, que vêm inteiros da raiz do determinante.

7.4 O fluido perfeito, da forma invariante à diagonal

CONFERE

Schutz: §4.7, p.100, Eqs. 4.36–4.38

A forma invariante é $T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + p \eta^{\alpha\beta}$ (Eq. 4.37), e no referencial de repouso ela tem de dar $T = \text{diag}(\rho, p, p, p)$ (Eq. 4.36).

Schutz verifica isso à mão, componente a componente: "if $\alpha = \beta = 0$ then $U^0 = 1$, $\eta_{00} = -1$, and $T^{\alpha\beta} = (\rho + p) - p = \rho$... by trying all possible α and β you can verify".

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart mink on M coords (t, x, y, z)
metric g on mink bundle TM { [t,t] = -1, [x,x] = 1, [y,y] = 1, [z,z] = 1 }
tensor U : TM on mink { [t] = 1 }
tensor T^{\mu\nu} := (rho + p) U^{\mu} U^{\nu} + (p) g^{\mu\nu}
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval T[a,b]
eval T[a,a]
eval T[a,b] U[a] U[b]
```

```

[t,t] = rho
[x,x] = p
[y,y] = p
[z,z] = p
12 independent components identically zero

3*p - rho

rho

```

As dezesseis componentes, e as doze fora da diagonal nulas — o "by trying all possible α and β " feito de uma vez. O traço $3p - \rho$ e a densidade que o próprio fluido mede, ρ , saem da mesma declaração.

Esta conta não podia ser escrita até a rodada passada. Um monômio só aceitava coeficiente racional, e $(\rho + p)$ é simbólico. O coeficiente escalar entre parênteses fecha isso; a §8 conta o que era o problema.

7.5 As simetrias do tensor de Riemann

CONFERE

Schutz: §6.5, p.158, Eqs. 6.69 e 6.70

$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$ (6.69), e $R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$ (6.70).

São elas que reduzem as 256 componentes de um tensor de rank 4 em quatro dimensões às 20 independentes.

O documento — um bloco.

```

manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart schw on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on schw bundle TM {
  [t,t] = -(1 - 2*Mass/r),
  [r,r] = 1/(1 - 2*Mass/r),
  [theta,theta] = r^2,
  [phi,phi] = r^2 * sin(theta)^2
}
tensor R := riemann g

```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```

eval R[a,b,c,d] + R[b,a,c,d]
eval R[a,b,c,d] + R[a,b,d,c]
eval R[a,b,c,d] - R[c,d,a,b]
eval R[a,b,c,d] + R[a,d,b,c] + R[a,c,d,b]

```

```
256 independent components identically zero
256 independent components identically zero
256 independent components identically zero
256 independent components identically zero
```

Schwarzschild tem 24 células não nulas no Riemann, então nenhuma das quatro identidades fecha por vacuidade — o teste confere isso antes.

7.6 As identidades de Bianchi, na forma diferencial

[CONFERE](#)

Schutz: §6.6, p.162, Eq. 6.90

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0.$$

É a forma de onde tudo o mais vem: contraída uma vez dá a Eq. 6.93, contraída duas vezes dá $\nabla \cdot G = 0$ (§3.3), e é por causa dela que as equações de Einstein são compatíveis com a conservação da energia.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart schw on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on schw bundle TM {
  [t,t] = -(1 - 2*Mass/r),
  [r,r] = 1/(1 - 2*Mass/r),
  [theta,theta] = r^2,
  [phi,phi] = r^2 * sin(theta)^2
}
tensor R := riemann g
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval R[a,b,c,d;e] + R[a,b,d,e;c] + R[a,b,e,c;d]
```

```
(491.984 ms)
1024 independent components identically zero
```

Mil e vinte e quatro células, cada uma uma derivada covariante de um tensor de rank 4 — a conta mais pesada deste documento, e meio segundo.

7.7 O traço do Einstein espacial é constante

[CONFERE](#)

Schutz: §13.2, p.425, Eq. 13.11

A condição de homogeneidade da cosmologia: o traço do tensor de Einstein tridimensional tem de ser uma constante κ . Para $g_{rr} = 1/(1 - \kappa r^2)$ ele vale -3κ .

É de onde Schutz tira a definição $\kappa := -\kappa/3$, e com ela a métrica espacial da Eq. 13.13.

O documento — um bloco.

```

manifold M dim 3
bundle TM on M dim 3
chart esp on M coords (r, theta, phi)
metric h on esp bundle TM {
  [r,r] = 1/(1 - k*r^2),
  [theta,theta] = r^2,
  [phi,phi] = r^2 * sin(theta)^2
}
tensor G := einstein h

```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval G[a,a]
```

```
-3*k
```

Sem `r` na resposta, que é a metade da afirmação que importa: a curvatura é a mesma em todo ponto, e é isso que "homogêneo" quer dizer.

7.8 A constante cosmológica é um fluido de pressão negativa

CONFERE

Schutz: §13.3, p.440, Eqs. 13.53–13.54

$$T_{\Lambda}^{\alpha\beta} = -(\Lambda/8\pi) g^{\alpha\beta} \text{ tem } \rho_{\Lambda} = \Lambda/8\pi \text{ e } p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}.$$

A pressão negativa é o ponto inteiro — é ela que acelera a expansão.

O documento — um bloco.

```

manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart frw on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on frw bundle TM {
  [t,t] = -1,
  [r,r] = Scale(t)^2/(1 - k*r^2),
  [theta,theta] = Scale(t)^2*r^2,
  [phi,phi] = Scale(t)^2*r^2*sin(theta)^2
}
tensor U : TM on frw { [t] = 1 }
tensor TL : TM, TM on frw {
  [t,t] = Lam/(8*pi),
  [r,r] = -Lam*(1 - k*r^2)/(8*pi*Scale(t)^2),
  [theta,theta] = -Lam/(8*pi*Scale(t)^2*r^2),
  [phi,phi] = -Lam/(8*pi*Scale(t)^2*r^2*sin(theta)^2)
}

```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval TL[a,b] U[a] U[b]
eval TL[a,a]
eval TL[a,b;b]
```

```
Lam/(8*pi)

-Lam/(2*pi)

4 independent components identically zero
```

A primeira é $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi$. A segunda é o traço $3p - \rho$, e $-\Lambda/2\pi = -4 \cdot (\Lambda/8\pi)$ só fecha com $p = -\rho$. A terceira é a conservação, que vale de graça porque $\nabla g = 0$.

7.9 A métrica de Kerr é vácuo

CONFERE

Schutz: §11.3, p.328, Eq. 11.71

O buraco negro em rotação, em coordenadas de Boyer-Lindquist, com $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ e $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. É solução de vácuo: $R_{\alpha\beta} = 0$.

É a única solução exata deste documento que não é esfericamente simétrica: tem termo cruzado $g_{t\phi}$ — o arrasto de referenciais — e um denominador que depende de **duas** coordenadas.

O documento — um bloco.

```
Sigma := r^2 + a^2*cos(theta)^2
Delta := r^2 - 2*M*r + a^2

manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart bl on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on bl bundle TM {
  [t,t] = -(1 - 2*M*r/Sigma),
  [t,phi] = -2*M*a*r*sin(theta)^2/Sigma,
  [r,r] = Sigma/Delta,
  [theta,theta] = Sigma,
  [phi,phi] = (r^2 + a^2 + 2*M*a^2*r*sin(theta)^2/Sigma) * sin(theta)^2
}
tensor Ric := ricci g
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval Ric[a,b]
```

```
motor: localizado
16 independent components identically zero
```

Menos de um segundo. A linha `motor: localizado` diz qual dos dois motores rodou: o denominador bivariado de Kerr é justamente o caso que a forma racional geral não fecha, e para o qual existe o motor localizado.

O documento acima é `examples/kerr.od`, o mesmo que o resto da suíte usa — não uma cópia que possa divergir dele.

7.10 A divergência de um tensor antissimétrico

CONFERE

Schutz: Exercício 6.34(c), p.166

Para $F^{\mu\nu}$ antissimétrico, $F^{\mu\nu}_{; \nu} = (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{, \nu} / \sqrt{-g}$.

É a divergência de Maxwell em espaço curvo, e a razão de as equações do campo eletromagnético não precisarem de símbolo de Christoffel nenhum. A identidade só vale por causa da antissimetria: os termos de Christoffel que sobriam são simétricos nos dois índices e morrem contra ela.

O documento — um bloco.

```
manifold M dim 4
bundle TM on M dim 4
chart schw on M coords (t, r, theta, phi)
metric g on schw bundle TM {
  [t,t] = -(1 - 2*Mass/r),
  [r,r] = 1/(1 - 2*Mass/r),
  [theta,theta] = r^2,
  [phi,phi] = r^2 * sin(theta)^2
}
tensor F : TM, TM on schw {
  [t,r] = A(t,r,theta,phi),      [r,t] = -A(t,r,theta,phi),
  [t,theta] = B(t,r,theta,phi),  [theta,t] = -B(t,r,theta,phi),
  [t,phi] = C(t,r,theta,phi),    [phi,t] = -C(t,r,theta,phi),
  [r,theta] = D(t,r,theta,phi),  [theta,r] = -D(t,r,theta,phi),
  [r,phi] = E(t,r,theta,phi),    [phi,r] = -E(t,r,theta,phi),
  [theta,phi] = H(t,r,theta,phi), [phi,theta] = -H(t,r,theta,phi)
}
raiz := sqrt(r^4*sin(theta)^2)
tensor S : TM on schw {
  [t] = (diff(raiz*A(..), r) + diff(raiz*B(..), theta) + diff(raiz*C(..),
phi))/raiz,
  [r] = (diff(-raiz*A(..), t) + diff(raiz*D(..), theta) + diff(raiz*E(..),
phi))/raiz,
  [theta] = (diff(-raiz*B(..), t) + diff(-raiz*D(..), r) + diff(raiz*H(..),
phi))/raiz,
  [phi] = (diff(-raiz*C(..), t) + diff(-raiz*E(..), r) + diff(-raiz*H(..),
theta))/raiz
}
```

A pergunta — o bloco seguinte, e a resposta.

```
eval F[a,b;b] - S[a]
```

4 independent components identically zero

As seis componentes independentes de F são funções indeterminadas das quatro coordenadas — nada se anula por acaso, e a divergência sozinha não é nula (o teste confere isso antes). Acima `(..)` abrevia `(t,r,theta,phi)`, que no arquivo real vai escrito por extenso.

8. O laço que fechou

Uma das dez não pôde ser escrita como o livro a escreve, e o motivo valia mais do que a conta. A Eq. 4.37, $T^{\alpha\beta} = (\rho+p)U^\alpha U^\beta + p \eta^{\alpha\beta}$, não tinha grafia neste programa: **um monômio só aceitava coeficiente racional**. Com um número funcionava; com um símbolo, não.

```
tensor T^{\mu\nu} := 3 U^{\mu} U^{\nu}          -> ok
tensor T^{\mu\nu} := rho U^{\mu} U^{\nu}      -> unknown tensor head `rho`
```

E a saída que o programa oferecia não existia. Declarar o escalar como tensor de rank 0 era recusado, e a recusa mandava usar um apelido; o apelido era recusado onde a mensagem mandava usá-lo. **Três mensagens, nenhuma errada por si, e um laço fechado.**

O que foi feito

O coeficiente escalar passou a existir, **entre parênteses**:

```
eval (rho + p) U[a] U[b] + (p) g[a,b]
tensor T^{\mu\nu} := (rho + p) U^{\mu} U^{\nu} + (p) g^{\mu\nu}
```

Ele aceita qualquer expressão escalar — apelido, função conhecida, fração —, multiplica o **termo inteiro** (contrações incluídas), e é aplicado depois da avaliação: `(rho) U[a] U[a]` é $-\rho$, não ρ , porque $U \cdot U = -1$.

Onde ele NÃO vale, e por quê

O escalar viaja **ao lado** do monômio, não dentro dele. O coeficiente de um monômio é um racional de máquina de propósito: ele entra no `Eq / Hash` e na ordenação de Butler-Portugal, e trocá-lo por expressão simbólica seria mudar o tipo central do núcleo, com consequências em `simplify`, `solve` e na canonicalização.

Então quem avalia componentes multiplica a grade pelo escalar, e o lado abstrato recusa — dizendo **onde a grafia vale**, que é o que faltava nas três mensagens antigas:

```
simplify (rho + p) T[a,b]
error: um coeficiente escalar entre parenteses -- `(rho + p) U^{\mu} U^{\nu}` --
so' vale onde ha COMPONENTES para multiplicar: `eval` e o lado direito de
`tensor NOME^{...} := ...`. No lado abstrato (`simplify`, `solve`, `canon`)
um simbolo solto nao tem significado sem um head de rank 0 que o declare
(`head NOME : on M`)
```

As outras duas mensagens do laço passaram a apontar para a saída que agora existe. Um nome solto em posição de fator sugere os parênteses; a recusa do rank 0 diz as duas coisas — como declarar o escalar e como usá-lo:

```
tensor T^{\mu\nu} := rho U^{\mu} U^{\nu}
error: unknown tensor head `rho` -- se `rho` era para ser um coeficiente
      ESCALAR, ele vai entre parenteses: `(rho) T^{\mu\nu}`

tensor E : on mink { [] = rho + p }
error: `E` teria rank 0 (um escalar). Um escalar com valor se declara como
      apelido (`E := EXPR`), e entra numa expressao tensorial como
      COEFICIENTE, entre parenteses: `(E) T^{\mu\nu}`
```

A dica dos parênteses só aparece quando o fator **não tem índices**. Quem escreveu `Q[a,b]` quis um tensor, e sugerir um coeficiente ali seria conselho errado — tem teste próprio dizendo isso.